第2讲 利率与利率期限结构

陈蓉 教授、博导
厦门大学管理学院财务系
厦门大学金融工程研究中心

http:// aronge.net
aronge@xmu.edu.cn

利率

利率

* 5%和6%的利率，哪一个更高？
  * 名义 or 真实？
  * 有风险 or 无风险？
  * 3个月 or 30年？
  * 每年计息一次 or 连续复利？

不同经济含义的利率

- 名义利率与真实利率
- 无风险利率与有风险利率
  - 无风险利率：到期回报没有风险的回报率
    - 并不意味着每天的市场价格是不变的
  - 有风险利率＝无风险利率＋风险溢酬（risk premium）
    - 风险溢酬：预期风险收益
- 不同投资期限的利率
- （瞬时）即期利率、到期收益率、（瞬时）远期利率

利率的不同表达方式

* 单利
* 普通复利
* 连续复利

单利

* 本金投资所获得的利息不计入本金再次生息

$$FV = PV\left(1 + N \cdot R_{单}\right)$$

$$PV = \frac{FV}{1 + N \cdot R_{单}}$$

普通复利

- “每年计m次复利的n年期年利率”
- 4个时间的要素
  - 利率的期限n
  - 利率的时间单位：年/月/日
    - 年比例利率（APR）与年有效收益率（AEY）
  - 计复利的频率m
  - 每年或每月具体计息天数的规定

普通复利使用要点

- 利率的计复利周期不宜长于利率的期限
- 所使用的即期利率期限应与现金流期限匹配，n年期现金流应使用n年期即期利率
- 要先将年比例利率转化为真实的单期复利利率再进行计算
- 在计算现值和终值时，利率的时间单位和期数的时间单位应相同

- 例：8个月期利率是半年计息一次的年化利率6%，试计算8个月后1000元钱在今天的现值？
- 一年计4次复利的半年期年利率是什么意思？

连续复利

* 当普通复利中的每年复利频率趋于无穷大时，就得到连续复利
* 连续复利与普通复利的差异在于复利频率

$$FV = \lim_{m\to\infty} PV\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn} = PV e^{R_c n}$$

$$PV = \lim_{m\to\infty} \frac{FV}{\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn}} = FV e^{-R_c n}$$

连续复利终值会无穷大吗？

表 2.1　复利频率与终值（年比例利率 10%）

复利频率	100 元在一年末的终值（精确至小数点后 4 位）
每一年（m=1）	110.0000
每半年（m=2）	110.2500
每季度（m=4）	110.3813
每月（m=12）	110.4713
每周（m=52）	110.5065
每天（m=365）	110.5156
连续复利（m=∞）	110.5171

连续复利与普通复利的等价转换

* 在给定现值和终值的情况下，计复利频率不同的利率之间是可以互相转换的。

$$\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn}=e^{R_c n}\rightarrow R_c=m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)=m\left[\ln P_{t+\frac{1}{m}}-\ln P_t\right]$$

例如一笔存款的连续复利年利率为 12%，那么与之等价的一年计 4 次复利的年利率就将是 $R_4=4\times\left(e^{12\%/4}-1\right)=12.18\%$。也就是说，如果实际上利息是每个季度支付一次，1 万元存款每个季度能得到的利息将为 304.55 元。此外，从这个例子中我们还可以看出，在相互等价的利率当中，计复利频率越高，利率值越小。

对数收益率与百分比收益率

* 对数收益率与百分比收益率

$$R_c = \ln(1+R_1) = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \ln P_1 - \ln P_0$$

连续复利优缺点

* 优点
  * 利率有三个性质与时间有关：期限、计息频率、时间单位。普通复利的陈述和计算需同时考虑这三个问题，但连续复利的公式已经将计息频率和时间单位固化，只需要考虑期限。
  * 计算多期收益率
  * 符合正态分布假设
    * 取值范围
    * 多期收益率
  * 不存在汇率收益率悖论
* 缺点
  * 横截面组合收益率≠单个资产收益率加权平均

不同的天数计算规则

* 实际天数/360：短期货币市场工具如LIBOR和SHIBOR
* 实际天数/实际天数：中长期债券、我国银行间市场的回购利率和互换利率
* 30/360：美国公司债券市场和一些欧洲债券市场

到期收益率与年金因子

到期收益率

- 到期收益率（yield-to-maturity，YTM）y_t^T是指一个从t时刻开始到T时刻到期的投资的年化平均内含回报率
- 即使期限相同，不同投资的到期收益率是不同的

不含权固息债定价：到期收益率定价

* 不含权固息债是最适合使用到期收益率的资产：未来现金流已知

$$V_t^{t_N} = cf_1 \cdot e^{-y_t^{t_N}\cdot(t_1-t)} + cf_2 \cdot e^{-y_t^{t_N}\cdot(t_2-t)} +\ldots+ cf_N \cdot e^{-y_t^{t_N}\cdot(t_N-t)} = \sum_{i=1}^{N} cf_i e^{-y_t^N \times (t_i-t)}$$

* 在两边同时乘上$e^{y_t^{t_N}\cdot(t_N-t)}$，可得

$$V_t^{t_N} \cdot e^{y_t^{t_N}\cdot(t_N-t)} = cf_1 \cdot e^{y_t^{t_N}\cdot(t_N-t_1)} + cf_2 \cdot e^{y_t^{t_N}\cdot(t_N-t_2)} +\ldots+ cf_N$$

* 年化内含回报率
  * t时刻以价格$V_t^{t_N}$买入债券，在$y_t^{t_N}$的年均收益率下，投资者到期将获得$V_t^{t_N} \cdot e^{y_t^{t_N}\cdot(t_N-t)}$，这与该债券未来所有现金流以$y_t^{t_N}$分别计算至到期$t_N$时刻的终值之和等价，因此到期收益率代表了一笔投资按当前价格买入的内含回报率。

平价到期收益率（par yield）

- 如果一个普通不含权固息债的价格等于其本金（面值），其隐含的到期收益率就是平价到期收益率
- 平价到期收益率会刚好等于其息票率

到期收益率的特点

- 到期收益率是一个广泛应用于债券领域的内含回报率指标，因为它综合考虑了债券投资的三种未来现金收益。
  - 每一期的现金流
  - 今天的投资价格$V_t^{t_N}$与未来偿还面值（包含在cf_N中）之间的资本利得
  - 每一期现金流按$y_t^{t_N}$投资至期末的再投资利息。

事前到期收益率的不确定性

* 违约风险
* 持有期不确定性
* 再投资风险

到期收益率的应用

- 用于报价
- 用于比较投资价值
  - 其他条件都相同、只有息票率不同的债券的到期收益率 才较具可比性
- 用于定价
  - 只有在其他条件都相同、仅息票率不同的债券之间，其到期收益率互相借鉴才是可以接受的

年金因子

* 年金因子为不同期限使用的贴现率是同一个利率

$$A_t^{t_N} = 1 \cdot e^{-y_t^{t_N} \times (t_1 - t)} + 1 \cdot e^{-y_t^{t_N} \times (t_2 - t)} + \ldots + 1 \cdot e^{-y_t^{t_N} \times (t_n - t)} = \sum_{i=1}^{N} e^{-y_t^{N} \times (t_i - t)}$$

到期收益率与年金因子

* 年金因子为不同期限使用的贴现率是同一个利率

$$A_t^{t_N}=1\cdot e^{-y_t^{t_N}\times(t_1-t)}+1\cdot e^{-y_t^{t_N}\times(t_2-t)}+\ldots+1\cdot e^{-y_t^{t_N}\times(t_N-t)}=\sum_{i=1}^{N}e^{-y_t^{N}\times(t_i-t)}$$

* 如果固定收益投资的每次现金流都相等、时间间隔不变，则到期收益率的计算公式可以用年金因子来简化表达

$$V_t^{t_N}=c\cdot A_t^{t_N}+M\cdot e^{-y_t^{t_N}\cdot(t_N-t)}$$

$$A_t^{t_N}=\sum_{i=1}^{N}e^{-y_t^{t_N}\cdot(t_i-t)}$$

即期利率与贴现因子

即期利率的定义、特点与应用

* 即期利率（零息利率）是只在到期时刻有一次现金流的投资的到期收益率

$$V_t^{t_N} = cf_N \cdot e^{-R_t^{t_N} \cdot (t_N - t)}$$

* 即期利率是更具一般性的贴现率，其最主要的用途就是作为贴现率为固定收益证券定价

$$V_t^{t_N} = cf_1 \cdot e^{-R_t^{t_1} \cdot (t_1 - t)} + cf_2 \cdot e^{-R_t^{t_2} \cdot (t_2 - t)} + \ldots + cf_N \cdot e^{-R_t^{t_N} \cdot (t_N - t)}$$

* 对比到期收益率定价

$$V_t^{t_N} = cf_1 \cdot e^{-y_t^{t_N} \cdot (t_1 - t)} + cf_2 \cdot e^{-y_t^{t_N} \cdot (t_2 - t)} + \ldots + cf_N \cdot e^{-y_t^{t_N} \cdot (t_N - t)} = \sum_{i=1}^{N} cf_i e^{-y_t^N \times (t_i - t)}$$

贴现因子

- 贴现因子是即期利率的另一种表达
- 贴现因子与即期利率一一对应、等价转换

$$B_t^T = 1 \cdot e^{-R_t^T \times (T-t)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_{t,m}^T}{m}\right)^{m \times (T-t)}}$$

不含权固息债定价：年金因子与贴现因子

- 年金因子：$V_t^{t_N} = c \cdot A_t^{t_N} + 100 \cdot e^{-y_t^N \times (t_i - t)}$

- 贴现因子：$V_t^{t_N} = \sum_{i=1}^{N} cf_i B_t^{t_i}$

瞬时（即期）利率

- 期限趋于零的即期利率
- 瞬时利率：instantaneous (spot) rate/short rate
- 区别：short-term rate（短期利率）
- 任何期限的无风险贴现因子（无风险即期利率）都可以表达为无风险瞬时利率的函数

$$B_t^T = e^{-R_t^T \times (T-t)} = \hat{E}_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\right]$$

即期利率与到期收益率

即期利率与到期收益率的联系

- 即期利率是只有一次期末现金流的投资的到期收益率，属于到期收益率的特例
- 这两者都可以作为贴现率为固定收益投资定价
- 一个t_N时刻到期的投资的到期收益率实际上可以看作t_1、t_2、…至t_N年的N个即期利率的某种加权平均，是投资至期末的总的年平均收益率，权重与每期现金流金额有关。反过来，即期利率$R_t^{t_N}$可以视为到期收益率$y_t^{t_N}$的边际利率。

即期利率与到期收益率的差异

到期收益率	即期利率
特定投资的平均年化回报率	信用和期限匹配的现金流的合理贴现率
年金因子	贴现因子
针对个体投资而言， 在一定条件下可作为贴现率为特定投资定价	更具有普适性，只要信用等级和期限匹配， 即可作为贴现率为现金流贴现定价
可用于为特定投资报价、 在具有可比性的条件下比较特定投资之间的相对投资价值	不适合用于报价和比较投资价值

- 对于普通固息债， n年期到期收益率与n年期即期利率常常比较接近，因为最后一笔现金流权重最大
- 作为平均值，到期收益率可以实现降维，易于分析
- 在实际中，最容易犯的错误是将特定债券的到期收益率当成对应期限的即期利率，为任意现金流贴现。

远期利率

远期利率（forward rate）

* 远期利率R_t^{T,T^*}是t时刻约定的T到T^*期限的利率

* 连续复利下：远期利率×远期期限=长期利率×长期期限—短期利率×短期期限

$$R_t^{T,T^*} \cdot (T^* - T) = R_t^{t,T^*} \cdot (T^* - t) - R_t^{t,T} \cdot (T - t)$$

* 证明：套利

远期利率的计算

- 远期利率的信息蕴含在即期利率期限结构中，由相应期限的即期利率决定。

$$R_t^{T,T^*} = \frac{R_t^{T^*} \cdot (T^* - t) - R_t^{T} \cdot (T - t)}{T^* - T}$$

远期利率与即期利率：数学关系

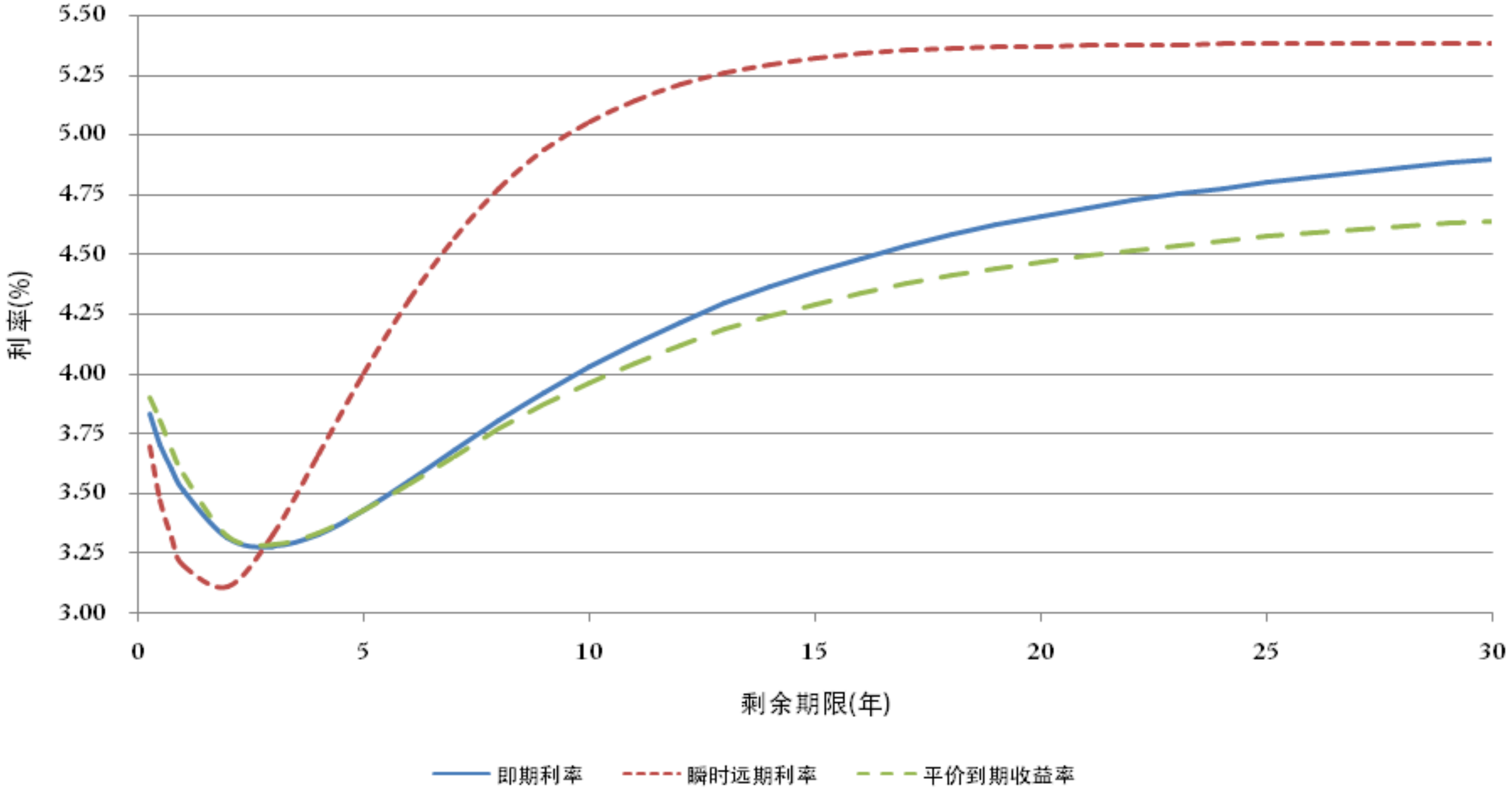
- 长期即期利率可以视为短期即期利率和远期利率的某种加权平均

$$R_t^{t,T^*} = \frac{R_t^{t,T} \cdot (T-t) + R_t^{T,T^*} \cdot (T^*-T)}{T^*-t} = R_t^{t,T} \cdot \frac{T-t}{T^*-t} + R_t^{T,T^*} \cdot \frac{T^*-T}{T^*-t}$$

- 远期利率可以视为某种边际利率·
  - 上升的即期利率期限结构：远期利率高于长期利率
  - 下降的即期利率期限结构：远期利率低于长期利率

$$R_t^{T,T^*} = \frac{R_t^{t,T^*} \cdot (T^*-t) - R_t^{t,T} \cdot (T-t)}{T^*-T} = \frac{R_t^{t,T^*} \cdot (T^*-T) - R_t^{t,T^*} \cdot (T-t) - R_t^{t,T} \cdot (T-t)}{T^*-T} = R_t^{t,T^*} + (R_t^{t,T^*} - R_t^{t,T}) \cdot \frac{T-t}{T^*-T}$$

远期利率、即期利率与平价到期收益率



远期利率与即期利率：经济关系

- 当远期开始时刻T就是当前时刻t时，远期利率等于即期利率

$$R_t^{t,T} = R_t^T$$

- 在给定时刻t，所有的远期利率R_t^{T,T^*}都是给定的，都是隐含在t时刻的即期利率期限结构里的
- 今天交易固定收益证券，就锁定了今天的远期利率，其实质是在bet今天的远期利率与未来即期利率的关系

远期利率的分析与讨论

- 远期利率不是未来的利率
- 远期利率不是当前时刻对未来即期利率的预期
- 远期利率是即期利率中隐含的关于未来即期利率预期和风险溢酬的信息
- 即期利率是远期利率的一个特例
- 长期即期利率可以视为短期即期利率和远期利率的加权平均
- 无论上升还是下降，到期收益率变动得最慢，远期利率变动得最快

远期利率与贴现因子

- 远期利率与贴现因子关系的数学表达式

$$e^{-R_t^{T,T^*}\cdot(T^*-T)}=\frac{B_t^{T^*}}{B_t^T}$$

$$\rightarrow R_t^{T,T^*}=\frac{lnB_t^T-lnB_t^{T^*}}{T^*-T}$$

- 远期利率等于“年化的贴现因子对数差分”

关于远期利率的进一步讨论

- 静态分析
  - 即使给定时刻t和远期开始时刻T，远期利率R_t^{T,T^*}仍然有无穷多个
  - 在讨论远期利率时，有时给定时刻t，有时给定远期开始时刻T，有时给定远期期限(T,T^*)

- 动态分析
  - 即使给定远期期限(T,T^*)，随着时刻t推移，R_t^{T,T^*}也是不断变化的，R_t^{T,T^*}本质上是一个随机过程

瞬时远期利率

- 当远期期限为瞬时，就得到瞬时远期利率（instantaneous forward rate）

$$R_t^{T,T+\Delta T}=R_t^{t,T+\Delta T}+\left(R_t^{t,T+\Delta T}-R_t^{t,T}\right)\cdot\frac{T-t}{T+\Delta T-T}\approx R_t^{t,T}+(T-t)\frac{\partial R_t^{t,T}}{\partial T}$$

$$R_t^{T,T+\Delta T}=\frac{lnB_t^T-lnB_t^{T+\Delta T}}{T+\Delta T-T}=-\frac{\partial lnB_t^T}{\partial T}$$

$$\rightarrow\ B_t^T=e^{-\int_t^T R_t^{s,s}ds}$$

期货利率

期货利率

- 期货利率本质上与远期利率相同，是通过期货合约约定的未来一定期限的利率
- 但交易机制设计上的差异导致期货利率和远期利率之间存在一定的差异

远期利率协议与利率期货：制度差异

1. 远期利率协议报出的是远期利率，而利率期货所报出的通常并非期货利率，而是与期货利率反向变动的特定价格，期货利率隐含在报价中
2. 利率期货有每日盯市结算与保证金要求
3. 远期利率协议的结算金额为未来利差的贴现值，而利率期货的结算金额为当天协议价与市场结算价之差，并不贴现

导致

- 交易方向差异：远期利率协议中的多头是规避利率上升风险的一方，而利率期货的多头则是规避期货价格上升风险，即规避利率下跌风险的一方
- 利率水平差异

远期利率与期货利率：水平差异

- 利率期货存在每日盯市结算与保证金要求，加上结算金额计算方式的不同，决定了远期利率与期货利率水平存在差异
  - 1 年以下的到期期限，期货利率 ≈ 远期利率
  - 长期：差异不能忽略
    - 一次性到期/每日盯市结算和保证金：远期利率较低
    - 盈亏结算时贴现/无贴现：远期利率较低

$$\text{远期利率} = \text{期货利率} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)(T^*-t)$$

利率期限结构

利率期限结构的定义

* “利率期限结构”（interest rate term structure），有时也称为“收益率曲线”（yield curve）

* 不同期限的利率水平之间的关系

利率期限结构的类型

- 利率的种类不同
  - 到期收益率曲线
  - 互换利率期限结构
  - 即期利率期限结构
  - 平价到期收益率曲线
  - 远期利率期限结构
  - 瞬时远期利率期限结构
- 信用等级不同

谢谢

厦门大学财务系 陈蓉
aronge@xmu.edu.cn